Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Al doilea test de selecţie pentru OBM şi OIM
Iaşi, 20 Aprilie 2006

Subiectul 1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir dat de $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, iar pentru orice $n > 1$

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1} + 1}.$$

a) Să se arate că toţi termenii şirului sunt numere naturale;

b) Să se arate că numărul $2a_n a_{n+1} + 1$ este pătrat perfect pentru orice $n \geq 1$.

Subiectul 2. Fie triunghiul ABC cu $\angle B = 30^\circ$. Considerăm discurile de rază $\dfrac{AC}{3}$ centrate în A, B, C. Există un triunghi echilateral cu vârfurile în câte unul dintre cele trei discuri?

Subiectul 3. Caracterizaţi perechile de numere naturale nenule (m, n) pentru care există o mulţime A cu proprietatea că pentru x, y numere naturale, dacă $|x - y| = m$, atunci cel puţin unul dintre numerele x, y aparţine mulţimii A, iar dacă $|x - y| = n$, atunci cel puţin unul dintre numerele x, y nu aparţine mulţimii A.

Subiectul 4. Fie x_i, $1 \leq i \leq n$ numere reale. Demonstraţi că

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} |x_i + x_j| \geq \frac{n-2}{2}\sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Timp de lucru: 4 ore
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.